全国大学生
数学竞赛
提高课程

05

第四章 一元函数积分学

中国大学MOOC



内容

07 柯西不等式

08 广义积分

中国大学MOOC

一、柯西不等式

有关结论

离散型

柯西不等式 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$,

当且仅当 a_i 与 b_i 对应成比例时等号成立.

柯西积分不等式 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$$

基本不等式 $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n} \le \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

几何平均数 ≤ 算术平均数

一、柯西不等式

例 1　设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 1 的连续函数，且满足 $0 \le f(x) \le 1$ 与 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$. 证明：$0 \le x \le 13$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t \le 11,$$

并给出取等号的条件.

证　由条件 $0 \le f(x) \le 1$，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t \le \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} \mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} \mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{x} + \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} = 1\cdot\sqrt{x} + \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(x+27)} + \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)}$$

柯西不等式 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，当且仅当 a_i 与 b_i 对应成比例时等号成立.

一、柯西不等式

证明：$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t \le 11$

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}=1\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(x+27)}+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)}$$

$$\le \sqrt{1+2+\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{2}(x+27)+\frac{3}{2}(13-x)}=11.$$

等号成立的充分必要条件是：$\sqrt{x}=\frac{1}{2}\sqrt{x+27}=\frac{3}{2}\sqrt{13-x}$，即 $x=9$.

柯西不等式 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，当且仅当 a_i 与 b_i 对应成比例时等号成立.

一、柯西不等式

证明：$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t \le 11$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x}$$
$$\le \sqrt{1+2+\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x + \frac{1}{2}(x+27) + \frac{3}{2}(13-x)} = 11.$$

等号成立的充分必要条件是：$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x+27} = \frac{3}{2}\sqrt{13-x}$，即 $x = 9$.

当 $x = 9$ 时，$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t$

$$= \int_0^3 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^6 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 11\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 11,$$

所以 $\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t \le 11.$

一、柯西不等式

例 2　设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1 \le f(x) \le 3$.

证明：$1 \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$

证　由柯西不等式　$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \ge \left[\int_0^1 \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right]^2 = 1.$

又由于 $(f(x)-1)(f(x)-3) \le 0$，则 $\frac{[f(x)-1][f(x)-3]}{f(x)} \le 0,$

即 $\frac{[f(x)]^2 - 4f(x) + 3}{f(x)} \le 0,$　即 $f(x) + \frac{3}{f(x)} \le 4,$

柯西不等式

设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\left[\int_a^b f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right] \cdot \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$

一、柯西不等式

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1 \le f(x) \le 3$. 证明：$1 \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$

$f(x) + \frac{3}{f(x)} \le 4$，所以 $\int_0^1 \left(f(x) + \frac{3}{f(x)} \right) \mathrm{d}x \le 4$.

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{1}{4}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x \right]^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^1 \left(f(x) + \frac{3}{f(x)} \right) \mathrm{d}x \right]^2 \le \frac{4^2}{4} \le 4,$$

从而 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$.

故 $1 \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$.

二、广义积分

无穷区间上的广义积分

设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，任取$b>a$，如果极限$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在，

则称该极限值为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的广义积分，记作$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

此时，也称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛；若极限不存在，则称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

类似地，我们可以定义函数$f(x)$在区间$(-\infty,b]$上的广义积分$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若右端极限存在，则称广义积分$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；否则，则称广义积分$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

二、广义积分

最后，我们可以定义函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 c 是任意的常数，a 是小于c 的任意数，b 是大于 c 的任意数.此广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 只有当上述等式中两极限同时存在时才是收敛的，如果有一个极限不存在，则称该广义积分是发散的.

二、广义积分

注：

在计算无穷区间的广义积分时，为了书写方便，实际运算中常常略去极限符号，形式上接近于牛顿—莱布尼兹公式的格式（只是形式上的）.

例如，设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，记$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$，$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$，则上述无穷区间的广义积分就可以表示成如下的形式

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a),$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty).$$

这时无穷区间的广义积分的收敛与发散就取决于极限$F(+\infty)$，$F(-\infty)$是否存在.

二、广义积分

例1　设 $a>0$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=$ _____.

解　$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\ln a+\ln t}{a^2(t^2+1)}\cdot a\,\mathrm{d}t$　　令 $x=at$

$$=\frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t+\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\ln a}{a}\arctan t\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{a}\left[\int_0^1\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{\pi\ln a}{2a}+\frac{1}{a}\left[\int_0^1\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t\right]$$

二、广义积分

设 $a>0$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=$ _____.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi\ln a}{2a}+\frac{1}{a}\left[\int_0^1\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t\right]$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int_1^0\frac{\ln\frac{1}{u}}{\frac{1}{u^2}+1}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \qquad \text{令 } u=\frac{1}{t}$$

$$=-\int_0^1\frac{\ln u}{u^2+1}\mathrm{d}u=-\int_0^1\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi\ln a}{2a}.$

二、广义积分

例 2　设区间$(0,+\infty)$上的函数$u(x)$定义为$u(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt$，则$u(x)$的初等函数表达式为_____.

解　$u^2(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt\cdot\int_0^{+\infty} e^{-xs^2}\,ds=\iint\limits_{s,t\geq 0} e^{-x(t^2+s^2)}\,dt\,ds$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{+\infty} e^{-xr^2}\cdot r\,dr=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-xr^2}\cdot r\,dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-xr^2}\,d(-xr^2)=-\frac{\pi}{4x}\lim_{a\to+\infty}\left(e^{-xa^2}-1\right)$$

$$=\frac{\pi}{4x}.\qquad\text{所以 } u(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

二、广义积分

例 3　设 $s>0$，求 $I_n=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx}x^n\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

$u=x^n$

$v=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-sx}$

解法 1　$I_n=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{d}\mathrm{e}^{-sx}=-\frac{1}{s}x^n\mathrm{e}^{-sx}\Big|_0^{+\infty}+\frac{n}{s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^{n-1}\mathrm{d}x$

$=\frac{n}{s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{n}{s}I_{n-1}$,

$s>0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\mathrm{e}^{-sx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^{sx}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{s\mathrm{e}^{sx}}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n!}{s^n\mathrm{e}^{sx}}=0$

得　$I_n=\frac{n}{s}I_{n-1}=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}I_{n-2}$

$=\cdots=\frac{n!}{s^{n-1}}I_1=\frac{n!}{s^{n+1}}.$

$I_1=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$

$u=x$

$v=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-sx}$

$=-\frac{1}{s}x\mathrm{e}^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x=\frac{1}{s^2}$

二、广义积分

Γ函数的定义是 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx \qquad (s>0)$

Γ函数的递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ 对任何正整数n，有 $\Gamma(n+1)=n!$

证 应用分部积分法，有

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s}dx=-\int_0^{+\infty} x^{s}d(e^{-x})=[-x^{s}e^{-x}]_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx=s\Gamma(s),$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{s}e^{-x}=0$可由洛必达法则求得.

显然$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1$，反复运用递推公式，便有

$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1$ $\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2!$ $\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3!$

一般地，对任何正整数n,有 $\Gamma(n+1)=n!$.

二、广义积分

设 $s>0$，求 $I_n=\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^n dx \ (n=1,2,\cdots)$.

解法 2 $I_n=\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^n dx \overset{t=sx}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t}(\frac{t}{s})^n \frac{1}{s}dt$

$$=\frac{1}{s^{n+1}}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^n dt$$

$$=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx \quad (s>0)$$

$$\Gamma(n+1)=n!$$



END

07 柯西不等式

08 广义积分

中国大学MOOC